Lemme de Morse

Rouvière p. 201 et 344 (157, 170, 171, 214, 215, 218)

lem : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tels que $\forall A \in V, \quad A = {}^t g(A)\, A_0\, g(A)$

démo : On pose
$$\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^t M A_0 M \end{array}$$

Comme φ est polynomiale, on a $\varphi \in \mathcal{C}^1$. Pour $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a
$$\varphi(Id+H) - \varphi(Id) = {}^t(Id+H)A_0(Id+H) - {}^t Id A_0 Id = {}^t H A_0 + A_0 H + {}^t H A_0 H$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ A_0 \in S_n(\mathbb{R})}}{=} {}^t(A_0 H) + A_0 H + O(\|H\|^2)$$
on munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée

Donc $d\varphi(Id).H = {}^t(A_0 H) + A_0 H$.

Donc $\mathrm{Ker}(d\varphi(Id))$ est formé des matrices H telles que $A_0 H$ soit antisymétrique.

De plus, $d\varphi(Id)$ est surjective puisque pour $A \in S_n(\mathbb{R})$ on a
$$d\varphi(Id)\left(\frac{1}{2}A_0^{-1}A\right) = {}^t\left(A_0 \frac{1}{2} A_0^{-1} A\right) + A_0 \frac{1}{2} A_0^{-1} A = \frac{1}{2}{}^t A + \frac{1}{2} A \underset{\substack{\uparrow \\ A \in S_n(\mathbb{R})}}{=} A$$

On pose $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ A_0 M \in S_n(\mathbb{R})\}$, on a alors F qui est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(d\varphi(Id))$.
De plus $Id \in F$. Soit $\psi : F \to S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F. Comme $\mathrm{Ker}(d\varphi(Id)) \cap F = 0$ on a $d\psi(Id)$ qui est bijective. Donc par le thm d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de Id dans F (que l'on peut supposer dans $GL_n(\mathbb{R})$) tel que ψ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $V := \psi(U)$. Ainsi V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(Id) = \varphi(Id)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in V$, il existe une unique matrice inversible $M \in U$ telle que $A = {}^t M A_0 M$ et donc $g = \psi^{-1}(A)$ convient

thm : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $df(0) = 0$ et $d^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et
$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x)^2.$$

démo : Selon la formule de Taylor avec reste intégrale au voisinage de 0 appliqué à f, on a :
$$f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t)\, d^2 f(tx)(x.x)\, dt = {}^t x \underbrace{\left(\int_0^1 (1-t)\, d^2 f(tx)\, dt\right)}_{:= Q(x)} x$$
identification de la Hessienne et la différentielle seconde.

Par le thm de dérivation sous le signe intégrale, on a $Q \in \mathcal{C}^1$ et <u>Q est une matrice symétrique</u>
Comme $f \in \mathcal{C}^3$, le thm de Schwarz $\Rightarrow$ Hessienne symétrique

D'après le lemme, il existe une matrice inversible $\Pi(x)$, une fonction $\mathcal{C}^1$ de x au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, telle que $Q(x) = {}^t\Pi(x)\, Q(0)\, \Pi(x)$. car $Q(0) = d^2 f(0) \cdot \frac{1}{2} \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.

D'où

$$f(x) - f(0) = {}^t y\, Q(x)\, y \quad \text{où} \quad y = \Pi(x)\, x.$$

Or $Q(0) = \frac{1}{2} d^2 f(0)$ qui est de signature $(p, n-p)$ donc il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^t P Q(0) P = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-p} \end{array}\right)$$ et le changement linéaire de coordonnées $y = Pu$ donne

$${}^t y\, Q(0)\, y = {}^t(Pu)\, Q(0)\, Pu = \sum_{i=1}^{p} u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2$$

Enfin l'application $\varphi : x \longmapsto u = P^{-1} y = P^{-1}\Pi(x)\, x$ est $\mathcal{C}^1$ et on a

$$d\varphi(0) \cdot h = P^{-1}\left(d\Pi(0) \cdot h \cdot 0 + \Pi(0)\, h\right) = P^{-1}\Pi(0) \cdot h.$$

Donc $d\varphi(0) = P^{-1}\Pi(0)$ est inversible.

Par le thm d'inversion locale, on a que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 car $\varphi(0) = 0$

Ainsi au voisinage de 0, on a :

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x)^2$$